数理解析研究所講究録
第 818 巻 1993 年 11-19



# 不完全性定理とWKL$_0$

東工大・理，東北大・理　菊池　誠　(Makoto Kikuchi)
東北大・教養　田中　一之　(Kazuyuki Tanaka)

## 0．はじめに

Smorynski による文献 [3] には “ Gödel 数 $x$ を持つ論理式が PA のある固定した model の上で成り立つ” という意味の述語 $Tr(x)$ を用いた，第一及び第二不完全性定理の証明が紹介されている．Gödel は “証明可能性” を表す述語 $Pr(x)$ を用いて不完全性定理を証明したが，$Pr(x)$ を $Tr(x)$ で置き換えても第一不完全性定理は証明できる．一方，第二不完全性定理は $Pr(x)$ が満たしているthe derivability conditionsと呼ばれる性質 D1，D2，D3 から直ちに導かれるが，$Tr(x)$ はD3 を満たさないので $Pr(x)$ を使った証明を$Tr(x)$ を用いて単純に書き換えることはできない．しかし，Kreisel は $Tr(x)$ の作り方を工夫し，それを使って 第二不完全性定理をmodel 論的に証明してみせた．ただし，この証明は有限の立場を越えるものなので PRA の上では展開できず，従って形式化された第二不完全性定理： PRA $\vdash Con_{PA} \rightarrow \neg Pr(\ulcorner Con_{PA} \urcorner)$ を直接導くことはない．

この論文で，われわれは Kreisel による第二不完全性定理の証明が WKL$_0$ の上で展開できることを示す．このことと後で紹介する Friedman の結果から形式化された第二不完全性定理の別証明が得られる．

Section 1では $WKL_0$ の定義を述べ，上で触れた Friedman の結果を紹介する．ところで，不完全性定理が $Pr(x)$ に関する命題である限り，$Tr(x)$ を用いた第二不完全性定理の証明においても $Pr(x)$ についての性質を用いることは必要である．そこで section 2では the derivability conditions に関連するいくつかの命題をモデル論的に証明する．以上を踏まえたうえで section 3では Kreisel の証明が $WKL_0$ の上で展開できることを示す．

## 1．$WKL_0$ と Friedman の Conservation Theorem

まず，1階算術の言語を $L_1=\{+, \cdot, 0, 1, <\}$，2階算術の言語を $L_2=L_1\cup\{\in\}$ によって定義する．自然数の上を動く変数として $x, y, z, \ldots$ を，自然数の集合の上を動く変数として $X, Y, Z, \ldots$ を用いる．$(\forall x)(x<t \rightarrow \phi(x))$, $(\exists x)(x<t \wedge \phi(x))$ という形で現われる quantifier を bounded quantifier と呼び，すべての quantifier が bounded であるような論理式を bounded formula，もしくは $\Sigma^0_0\,(=\Pi^0_0)$ formula という．$\phi$ が $\Sigma^0_n$（もしくは $\Pi^0_n$）formula のとき，$(\forall x_1 \ldots \forall x_k)\phi$（もしくは $(\exists x_1 \ldots \exists x_k)\phi$）という形の論理式を$\Pi^0_{n+1}$（もしくは $\Sigma^0_{n+1}$） formula という．また，自由変数を含まない formula を sentence と呼ぶ．

次の (i), (ii), (iii) を公理とする $L_2$ theory を $RCA_0$ (Recursive Comprehension Axiom の体系) と呼ぶ．

(i) $+$，$\cdot$，$0$，$1$，$<$ に関する基本的な公理．

(ii) $\Sigma^0_1$ induction ; $\phi(x)$ を $\Sigma^0_1$ formula として

$$\phi(0) \wedge (\forall x)(\phi(x)\rightarrow\phi(x+1)) \rightarrow (\forall x)\phi(x) .$$

(iii) $\Delta^0_1$ comprehension ; $\phi(x)$ を $\Sigma^0_1$ formula, $\psi(x)$ を $\Pi^0_1$ formula として

$(\forall x)(\phi(x) \leftrightarrow \psi(x)) \rightarrow (\exists X)(\forall x)(x \in X \leftrightarrow \phi(x))$.

$Seq_2$を $0$ と $1$ からなる有限列の集合とする．任意の無限２分木 ($\subseteq Seq_2$ ) が無限長の path を持つという命題を Weak König's Lemma (WKL) と呼び，$RCA_0$ に WKL を公理として付け加えた体系を $WKL_0$ と呼ぶ．また， primitive recursive function を表す記号をすべて持つ体系で，すべての primitive recursive function の定義式を公理とし，さらに quantifier を持たない論理式に対する inductionを持った体系を PRA (Primitive Recursive Arithmetic) と呼ぶ．

次の定理が先に述べた Friedman の結果である（証明は 田中[5] を参照）．

**定理1.1 (Friedman の Conservation Theorem)**. 任意の $\Pi^0_2$ sentence $\phi$ ( in $L_1$ ) について，$WKL_0 \vdash \phi$ ならば PRA $\vdash \phi$.

逆数学における一連の結果からわかるように $WKL_0$ の上ではかなり豊かな数学を展開できる（例えば 田中 [4] ）．数理論理学に関することでは 完全性定理やコンパクト性定理を $WKL_0$ の上で証明することができる（Simpson [1] ）．ただし $WKL_0$ においては，与えられた数学的構造の上での sentenceの充足関係（真理値関数）が一般には定義できないので，countable model とその上の充足関係を一緒にしたもの，つまり countable model の elementary diagram を model と呼ぶことにする．

**定理1.2 ($WKL_0$)**. $T$を可算言語 $L$ の theory とする．以下は 同値.

(i). $T$ は無矛盾.

(ii). $T$ は model を持つ.

定理1.2 から次の形の完全性定理も得られる.

**定理1.3 ($WKL_0$).** $T$を可算言語 $L$ の theory とする. このとき任意の $L$ sentence $\phi$について $T \vdash \phi$ と $T \models \phi$は同値.

## 2. The derivability conditions

$Proof(x, y)$ は "$y$は Gödel 数 $x$ の論理式を導く PA の証明の Gödel 数である" を意味する $L_1$ formula とし, $Pr(x) = (\exists y)Proof(x, y)$, $Con_{PA} = \neg Pr(\ulcorner 0=1 \urcorner)$ とする. $S$を PRA などの体系とし, 次の D1 ~ D3 を the derivability conditions と呼ぶ.

D1. PA $\vdash \phi$ ならば $S \vdash Pr(\ulcorner \phi \urcorner)$,

D2. $S \vdash Pr(\ulcorner \phi \urcorner) \wedge Pr(\ulcorner \phi \rightarrow \psi \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner \psi \urcorner)$,

D3. $S \vdash Pr(\ulcorner \phi \urcorner) \rightarrow Pr(\ulcorner Pr(\ulcorner \phi \urcorner) \urcorner)$.

$S$=PRA のときに D1 ~ D3 が成り立つことがわかれば第二不完全性定理や形式化された第二不完全性定理を直接証明することができる. Kreisel による$Tr(x)$ を用いた第二不完全性定理の証明では$S$=PA の場合の D1 と D2 が必要だが, D1, D2 の証明は D3 と比べれば比較的易しい. しかし, Kreisel の証明を $WKL_0$ 上で形式化しようとすると $S$=$WKL_0$ の場合の D3 も必要になる. D3 を証明するためには D1 の証明を形式化すればよいが, D1 の syntactical な証明をそのまま形式化するのは非常に手間のかかる作業なので, $S$=PA の場合の D1 の次のような semantical な証明を考える.

D1 の証明．PA $\vdash \phi$ を仮定する．このとき $\mathbb{N} \models Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$．M を PA の任意の model とすると M は $\mathbb{N}$ の end extension なので $\mathbb{N}$ の上で成り立つ $\Sigma^0_1$ sentence はすべて M の上でも成り立つ．ここで，$Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$ は $\Sigma^0_1$ sentence なので $\mathrm{M} \models Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$．M の任意性と完全性定理から PA $\vdash Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$．　□

この証明を $\mathrm{WKL}_0$ の上で展開する．$\mathrm{RCA}_0$ の上で $(\forall x)(x \in X \leftrightarrow x = x)$ を満たす集合 $X$ の存在がいえるので，以下この $X$ を $\mathbf{N}$ と書く．次の補題は PA の任意の model が $\mathbf{N}$ の end extension になっていることを意味する．

**補題2.1** ($\mathrm{RCA}_0$)．M を PA の model とする．このとき以下の (i) ～ (iv) を満たす関数 $e_\mathrm{M}: \mathbf{N} \to |\mathrm{M}|$ が存在する；任意の $m, n \in \mathbf{N}$ について，

(i).　$e_\mathrm{M}(0) = 0_\mathrm{M}$, $e_\mathrm{M}(1) = 1_\mathrm{M}$,

(ii). $\mathrm{M} \models e_\mathrm{M}(m+n) = e_\mathrm{M}(m) + e_\mathrm{M}(n)$, $\mathrm{M} \models e_\mathrm{M}(m \cdot n) = e_\mathrm{M}(m) \cdot e_\mathrm{M}(n)$,

(iii). $\mathrm{M} \models e_\mathrm{M}(m) = e_\mathrm{M}(n)$ ならば $m = n$,

(iv). $\mathrm{M} \models a < e_\mathrm{M}(m)$, $a \in |\mathrm{M}|$ ならば $r \in \mathbf{N}$ が存在して $\mathrm{M} \models a = e_\mathrm{M}(r)$.

**証明**．まず，

$$(m, n) \in s \Leftrightarrow (m, n \in |\mathrm{M}|) \wedge (\mathrm{M} \models m+1 = n)$$

によって，$|\mathrm{M}|$ から $|\mathrm{M}|$ への関数 $s$ を定める．この $s$ を使って $e_\mathrm{M}: \mathbf{N} \to |\mathrm{M}|$ を primitive reursion で次のように定める

(i). $e_\mathrm{M}(0) = 0_\mathrm{M}$,

(ii). $e_\mathrm{M}(n+1) = s(e_\mathrm{M}(n))$.

この $e_\mathrm{M}$ が (i) ～ (iii) を満たすことは明らか．(iv) を満たすことは $m$ に関する帰納法

で証明できる．　□

定理2.2 ($RCA_0$)．上の補題の M，$e_M$ について，$\phi(x_1, \ldots, x_n)$ を任意の $\Sigma^0_1$ formula とすると $(\forall x_1 \ldots \forall x_n)(\phi(x_1, \ldots, x_n) \to M \models \phi(e_M(x_1), \ldots, e_M(x_n)))$ が成り立つ．

証明．$\phi$ の複雑さに関する帰納法．　□

$Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$ は $\Sigma^0_1$ sentence なので，次の系は $S$=PRA の場合の D3 の一般化である．

系2.3．任意の $\Sigma^0_1$ sentence $\phi$ について，PRA$\vdash \phi \to Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$．

証明．前の定理と定理1.3 から $WKL_0 \vdash \phi \to Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$．ここで $\phi \to Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$ は $\Pi^0_2$ sentence なので Friedman の定理から PRA $\vdash \phi \to Pr(\ulcorner\phi\urcorner)$．　□

## 3．Kreisel による第二不完全性定理の証明

$C = \{c_n\}_{n<\omega}$ を $L_1$ に対する Henkin constant の集合とし，$L_1' = L_1 \cup C$ とおく．“$x$ は $L_1'$ sentence （の Gödel 数）である”を表す $L_1$ formula を $L_1'\text{-}snt(x)$ と書く．PA にすべての Henkin axiom $(\exists x)\phi_n(x) \to \phi_n(c_n)$ を付け加えて得られる $L_1'$ theory を PA' と呼んで，“$x$ は PA' の公理の Gödel 数である”を表す $L_1$ formula を $PA'(x)$ とする．PA' の consistent な complete extension を表す $L_1$ formula が $Tr(x)$ であるが，それを以下のように定義する．

まず，$x, y \in Seq_2$ に対して $x \cap y$ を 2 つの文字列 $x$ と $y$ を結合して出来る文字列のコードとし，$(x)_k$ で文字列 $x$ の $k$ 番目の数を，$lh(x)$ で $x$ の長さを表す．次に $Seq_2$ 上の

二項関係 $x <_{\mathrm{L}} y$ （“$x$ は $y$ の左にある” の意）を次のように定義する.

$$x <_{\mathrm{L}} y \Leftrightarrow (\, x, y \in Seq_2)$$
$$\wedge (\exists n < \min\{lh(x), lh(y)\}) \{(\forall m < n)(\, (x)_m = (y)_m) \wedge (x)_n < (y)_n \}.$$

さて，$L_1$ formula $cns(x)$ を次のように定める.

$$cns(x) \Leftrightarrow (\, x \in Seq_2) \wedge (\, \{\phi \mid L_1'\text{-}snt(\ulcorner\phi\urcorner) \wedge \ulcorner\phi\urcorner < lh(x) \wedge (x)_{\ulcorner\phi\urcorner} = 0\} \cup \mathrm{PA}' \text{ は無矛盾}\,).$$

ここで $cns(x)$ が $Seq_2$ の部分木と見做せることは 明らかである. 次に,

$$lft(x) \Leftrightarrow cns(x) \wedge (\forall y)(y <_{\mathrm{L}} x \rightarrow \neg cns(y)),$$

とおき，$Tr(x)$ を次のように定義する.

$$Tr(x) \Leftrightarrow (\exists y)(\, lft(y) \wedge lh(y) = x+1 \wedge (y)_x = 0\,).$$

任意の $L_1$ formula $\phi(x)$ に対して，$Mod_{PA}(\phi)$ を “$\phi$ は $C$（の同値類の代表元）を universe として持つ PA の model を定める” を意味する $L_1$ formula とする.

**定理3.1（算術化された完全性定理）**. PA $\vdash Con_{PA} \rightarrow Mod_{PA}(Tr)$.

この定理を証明するために次の補題を用意する.

**補題3.2**. PA $\vdash Con_{PA} \rightarrow (\forall x)(\exists y)(\, lh(y) = x \wedge lft(y)\,)$.

**証明**. PA の中で議論を進める. $Con_{PA}$ を仮定し，$x$ に関する帰納法で証明する. $x=0$ のとき，$Con_{PA}$ を仮定しているので $y$ を null sequence とすると $lh(y)=0 \wedge lft(y)$ となる. $x=n$ に対して $lh(m)=n \wedge lft(m)$ となる $m$ が存在するとする. $n$ が $L_1'$ sentence の Gödel 数であり，$L_1$ formula $(\, x<n \wedge (m)_x=0\,) \vee x=n \vee PA'(x)$ が定める $L_1'$ theory が無矛盾のとき，$m' = m \frown (0)$ とすれば $lh(m')=n+1 \wedge lft(m')$. それ以外のとき

は $m'=m\cap(1)$ とすればよい． □

**定理3.1の証明．** PA の中で証明を進める．$Con_{PA}$ を仮定する．$(\forall x)(L_1'\text{-}snt(x) \rightarrow (\neg Tr(x) \leftrightarrow Tr(\neg x)))$ を示せばよいが，これは補題3.2 と $Tr(x)$ の定義から明らか． □

この $Tr(x)$ を用いて第二不完全性定理を証明する．

**定理3.3（対角化定理）．** 任意の $L_1$ formula $\phi(x)$ に対して $L_1$ sentence $\sigma$ が存在して，PA $\vdash \sigma \leftrightarrow \phi(\ulcorner\sigma\urcorner)$.

上の定理の証明は Smorynski [3] などを参照されたい．

**定理3.4（第二不完全性定理）（$\mathrm{WKL}_0$）．** $Con_{PA} \rightarrow \neg Pr(\ulcorner Con_{PA}\urcorner)$.

**証明．** 対角化定理の $\phi(x)$ として $\neg Tr(x)$ を当てはめたときに得られる sentence を $\sigma_0$ とし，$n=\ulcorner\sigma_0\urcorner$ とする．以下 $\mathrm{WKL}_0$ の中で証明を進める．$Con_{PA}$，$Pr(\ulcorner Con_{PA}\urcorner)$ を仮定する．

まず $Con_{PA}$ から完全性定理により PA の model $\mathrm{M}_0$ が存在する．この $\mathrm{M}_0$ に対して $\mathrm{M}_1(\subseteq \mathbf{N})$ を

$$i\in \mathrm{M}_1 \Leftrightarrow \mathrm{M}_0 \models Tr(e_{\mathrm{M}_0}(i)) \quad \text{for all } i\in \mathbf{N}$$

によって定義する．$\neg$: $\mathbf{N}\rightarrow\mathbf{N}$ などは recursive function なので定理2.2 から $\mathrm{M}_0 \models \neg e_{\mathrm{M}_0}(x)=e_{\mathrm{M}_0}(\neg x)$ などが成立する．よって $Pr(\ulcorner Con_{PA}\urcorner)$ と定理3.1，D1 から $\mathrm{M}_1$ は $L_1$ structure. さらに定理2.2 から $(\forall x)(Pr(x) \rightarrow \mathrm{M}_0 \models Pr(e_{\mathrm{M}_0}(x)))$ が成り立ち $(\forall x)(Pr(x)$

$\rightarrow M_0 \models Tr(e_{M_0}(x))$ ) となるので $M_1$ は PA の model. この操作を $2^{n+1}$ 回繰り返すことにより PA の model の列 $M_0, M_1, \ldots, M_{2^{n+1}}$ が得られる.

各 $i=0, 1, \ldots, 2^{n+1}$ について補題3.2 から $m_i \in \mathbf{N}$ が存在して, $M_i \models lh(e_{M_i}(m_i))=n+1 \wedge lft(e_{M_i}(m_i))$. $n$ と $M_{i+1}$ の定義から $m_i \neq m_{i+1}$. $m \in \mathbf{N}$ とする. $\neg cns(m)$ は $\Sigma^0_1$ sentence なので系2.3 と D1 から $Pr(\ulcorner \neg cns(m) \rightarrow Pr(\ulcorner \neg cns(m) \urcorner) \urcorner)$. よって $M_i \models \neg cns(m) \rightarrow Pr(\ulcorner \neg cns(m) \urcorner)$ となり, これと定理3.1 から $M_i \models \neg cns(m)$ ならば $M_{i+1} \models \neg cns(m)$. ゆえに $lft(x)$ の定義から $m_i <_L m_{i+1}$.

以上から $m_0, m_1, \ldots, m_{2^{n+1}}$ はすべて相異なる$0, 1$の文字列のコードとなるが, これは長さ n+1 の $0, 1$ の有限列が $2^{n+1}$ 個しかないことに矛盾. □

定理3.4 と定理1.1 から,

系3.5. PRA $\vdash Con_{PA} \rightarrow \neg Pr(\ulcorner Con_{PA} \urcorner)$.

## 参考文献

1. Simpson, S. G., *Subsystems of Second Order Arithmetic*, forthcoming.

2. Simpson, S. G. and Tanaka, K., *On the strong soundness of the theory of real closed fields*, Proc. of the 4th. Asian Logic Conf. (1990), 7-10.

3. Smorynski, C. A., *The incompleteness theorem*, Handbook of Mathematical Logic (Barwise, J., ed.), North Holland, 1977, pp. 821-865.

4. 田中 一之, '逆・数学' と二階算術の証明論, 数学, 42 (1990), 244-260.

5. 田中 一之, 2 階算術の諸体系 - モデル論的手法による分析, 数理研講究録771 (順序数の基本列と組合せ的原理の関係) (1991), 118-156.